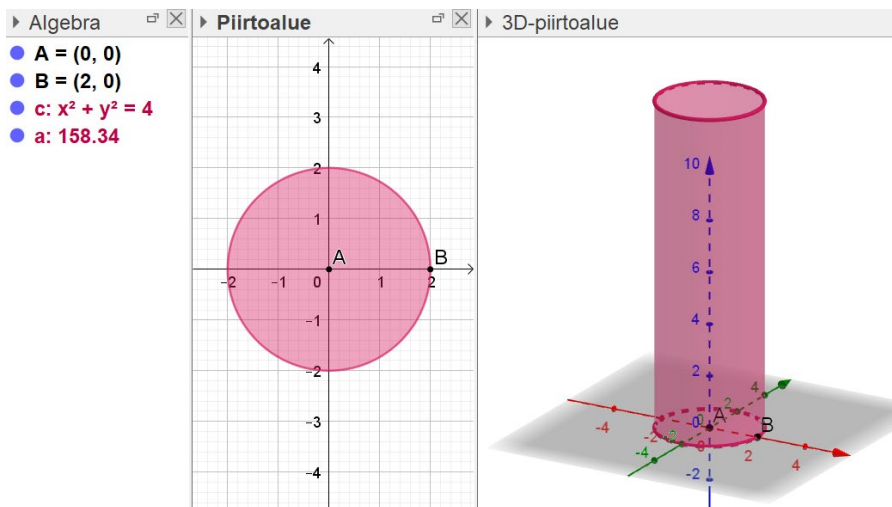


13.1

Piirretään 2D-piirtoalueessa lieriön pohjaksi ympyrä, jonka säde on 2,0. Laajennetaan 3D-piirtoalueessa ympyrä suoraksi ympyrälieriöksi, jonka korkeus on 12,6.



Mitataan lieriön tilavuus. Tilavuudeksi saadaan kahden numeron tarkkuudella 160.

Lasketaan lieriön tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= A_p h \\ &= \pi r^2 h \\ &= \pi \cdot 2,0^2 \cdot 12,6 \\ &= 158,33... \\ &\approx 160 \end{aligned}$$

Pohja on ympyrä, joten $A_p = \pi r^2$.

Sijoitetaan $r = 2,0$ ja $h = 12,6$.

Vastaus

160

13.2

- a) Kattila on suoran ympyrälieriön muotoinen. Lasketaan kattilan tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= A_p h \\ &= \pi r^2 h \\ &= \pi \cdot \left(\frac{23}{2}\right)^2 \cdot 17 \\ &\approx 7100 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Kattilan tilavuus ilmaistaan yleensä litroina.

$$7100 \text{ cm}^3 = 7,1 \text{ dm}^3 = 7,1 \text{ L}$$

- b) Pakkaus on suora lieriö, jonka pohja on tasakylkinen suorakulmainen kolmio. Lasketaan pakkauksen tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= A_p h \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5,0 \cdot 5,0 \cdot 16,0 \\ &= 200 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

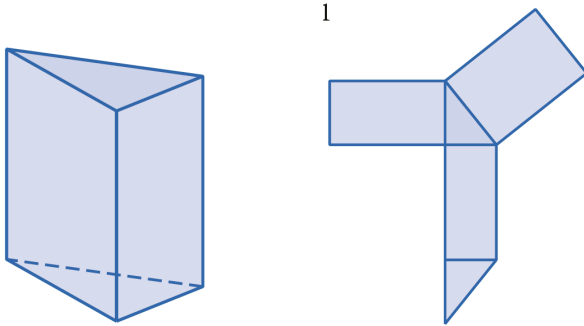
Vastaus

a) $7100 \text{ cm}^3 = 7,1 \text{ L}$

b) 200 cm^3

13.3

Piirretään 2D-piirtoalueessa särmiön pohjaksi suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat 3,0 ja 4,0. Laajennetaan 3D-piirtoalueessa kolmio suoraksi särmiöksi, jonka korkeus on 9,0. Tehdään lopuksi särmiön tasoleivitys.



Särmiön pohjat ovat suorakulmaisia kolmioita ja sivutahkot suorakulmioita. Lasketaan pohjakolmion pinta-ala.

$$A_k = \frac{3,0 \cdot 4,0}{2} = 6,0$$

Ratkaistaan pohjakolmion hypotenuusan pituus x .

$$x^2 = 3,0^2 + 4,0^2$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$x = -5,0 \text{ tai } x = 5,0$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x = 5,0$.

Lasketaan sivutahkojen pinta-alat.

$$A_1 = 3,0 \cdot 9,0 = 27,0$$

$$A_2 = 4,0 \cdot 9,0 = 36,0$$

$$A_3 = 5,0 \cdot 9,0 = 45,0$$

Lasketaan kokonaispinta-ala.

$$2A_p + A_1 + A_2 + A_3$$

$$= 2 \cdot 6,0 + 27,0 + 36,0 + 45,0$$

$$= 120$$

Vastaus

120

13.4

- a) Lieriössä on kaksi yhtenevää ja yhdensuuntaista pohjaa ja niitä yhdistävä vaippa.

Kappale 1 on lieriö, jonka pohjat ovat kolmioita, ja kappale 4 on lieriö, jonka pohjat ovat ympyröitä.

- b) Särmiö on lieriö, jonka pohja on monikulmio.

Kappale 1 on suora kolmisivuinen särmiö.

Vastaus

- a) 1 ja 4
b) 1

13.5

a) Lasketaan lieriön tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= \pi \cdot 4,1^2 \cdot 12,3 \\ &\approx 650 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

b) Lieriön vaippa on suorakulmio, jonka kanta on pohjaympyrän kehän pituinen ja korkeus 12,3 cm.

$$\begin{aligned} A_V &= 2\pi r h \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 4,1 \cdot 12,3 \\ &\approx 320 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

c) Kokonaispinta alaan kuuluu vaipan pinta-alan lisäksi lieriön pohjien yhteispinta-ala.

$$\begin{aligned} A_k &= A_V + A_p \\ &= 2\pi r h + 2\pi r^2 \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 4,1 \cdot 12,3 + 2 \cdot \pi \cdot 4,1^2 \\ &\approx 420 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus

a) 650 cm^3

b) 320 cm^2

c) 420 cm^2

13.6

Makeispakkauksen pohjat ovat neliöitä, joiden sivun pituus on 3,0 cm. Pakkauksen sivutahkot ovat suorakulmioita, joiden kanta on 3,0 cm ja korkeus 15,0 cm.

Lasketaan pakkauksen kokonaispinta-ala.

$$\begin{aligned} A_k &= A_{vaippa} + A_{pohjat} \\ &= 4 \cdot 3,0 \cdot 15,0 + 2 \cdot 3,0 \cdot 3,0 \\ &\approx 200 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Yhteen pakkaukseen tarvitaan pahvia 200 cm².

Vastaus

200 cm²

13.7

Multakerros on suora lieriö, tilavuus on 12 m^3 ja korkeus $8 \text{ cm} = 0,08 \text{ m}$.
ja korkeus 8 cm .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan lieriön pohjan pinta-ala.

$$V = A_p h$$

$$12 = A_p \cdot 0,08 \quad |:0,08$$

$$A_p = \frac{12}{0,08}$$

$$\approx 150 \text{ (m}^2\text{)}$$

Multa riittää 150 m^2 :n alueelle.

Vastaus

150 m^2 :n alueelle

13.8

Maapallon säde on noin 6370 km. Merenpinnan nousu on hyvin pieni Maan säteeseen verrattuna, joten maanpinnan kaarevuus ei vaikuta tulokseen merkittävästi.

Sulamisvedet muodostavat merien pinnalle suoran lieriön muotoisen kerroksen, jonka pohjan pinta-ala on $381\,000\,000\text{ km}^2$ ja korkeus h .

Jäätiköiden tilavuus on $3\,000\,000\text{ km}^3$. Lasketaan sulamisveden tilavuus.

$$0,90 \cdot 3\,000\,000 = 2\,700\,000\text{ (km}^3\text{)}$$

Ratkaistaan merenpinnan nousukorkeus.

$$V = A_p h$$

$$2\,700\,000 = 381\,000\,000 \cdot h \quad | : 381\,000\,000$$

$$h \approx 0,00708\text{ (km)}$$

Muunnetaan korkeus metreiksi.

$$0,00708\text{ km} = 7,08\text{ m} \approx 7\text{ m}$$

Vastaus

7 m

13.9

Kuva on samanlainen kuin esimerkissä 3.

Nyt korkeus $h = 10,0$ cm, tilavuus $V = 5$ dl ja pohjan sädettä r ei tiedetä.

Muunnetaan tilavuuden yksikkö vastaamaan korkeuden yksikköä.

$$5 \text{ dl} = 0,5 \text{ L} = 0,5 \text{ dm}^3 = 500 \text{ cm}^3$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan tölkin pohjan säde.

$$V = \pi r^2 h$$

$$500 = \pi r^2 \cdot 10,0$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$r \approx -3,98942 \text{ tai } r \approx 3,98942$$

Pituus on positiivinen luku, joten $r \approx 3,98942$ cm .

Lasketaan tölkin kokonaispinta-ala.

$$\begin{aligned} A_k &= A_{\text{pohjat}} + A_{\text{vaippa}} \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 3,98942^2 + 2 \cdot \pi \cdot 3,98942 \cdot 10,0 \\ &\approx 351 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Peltiä tarvitaan 351 cm^2 .

Vastaus

$$351 \text{ cm}^2$$

13.10

Öljy muodostaa säiliön pohjalle lieriön, jonka pääty on kuvan harmaa segmentti.

Kuviossa $AE = 0,8$ m,
 $DE = 0,5$ m ja $AD = 0,3$ m.

Ratkaistaan kulman DAC
suuruus α .

$$\cos \alpha = \frac{0,3}{0,8}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{0,3}{0,8} \right)$$

$$\approx 67,97^\circ$$

Lasketaan kolmion ABC pinta-ala.

$$A_k \approx \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot \sin(2 \cdot 67,97^\circ) \approx 0,2224 \text{ (m}^2\text{)}$$

Lasketaan sektorin ABC pinta-ala.

$$A_s \approx \frac{2 \cdot 67,97^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 0,8^2 \approx 0,7592 \text{ (m}^2\text{)}$$

Lasketaan segmentin pinta-ala.

$$A_{seg} = A_s - A_k$$

$$\approx 0,7592 - 0,2224$$

$$= 0,5368 \text{ (m}^2\text{)}$$

Lasketaan öljyn tilavuus.

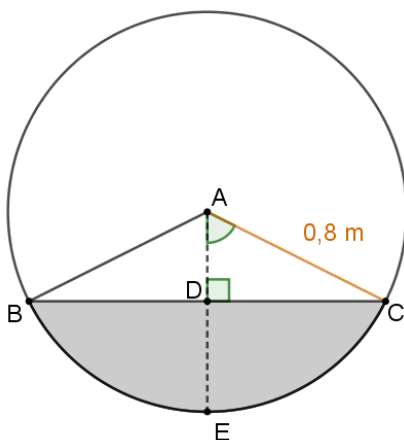
$$V = A_p h$$

$$\approx 0,5368 \cdot 3,5$$

$$\approx 1,8788 \text{ (m}^3\text{)}$$

Ilmaistaan tilavuus litroina.

$$1,8788 \text{ m}^3 = 1878,8 \text{ dm}^3 = 1878,8 \text{ L} \approx 1900 \text{ L}$$

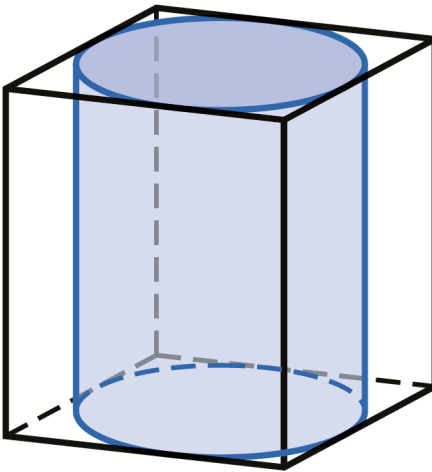


Vastaus

1900 L

13.11

- a) Piirretään 2D-piirtoalueessa lieriön pohjaksi ympyrä, jonka säde on 2,0. Laajennetaan 3D-piirtoalueessa ympyrä suoraksi ympyrälieriöksi, jonka korkeus on. Piirretään tämän jälkeen lieriön ympärille säännöllinen nelisivuinen särmiö.



- b) Lasketaan särmiön tilavuus.

$$V = A_p h = 4,0 \cdot 4,0 \cdot 5,0 = 80$$

Lasketaan lieriön tilavuus

$$V = A_p h = \pi r^2 h = \pi \cdot 2,0^2 \cdot 5,0 \approx 63$$

Vastaus

särmiön tilavuus 80, lieriön tilavuus 63

13.12

a) Lasketaan suoran ympyrälieriön tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= A_p h \\ &= \pi \cdot 5,0^2 \cdot 14,0 \\ &\approx 1100 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

b) Lasketaan kolmisivuisen särmiön tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= A_p h \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot 3,5 \cdot 6,4 \\ &= 22,4 \\ &\approx 22 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

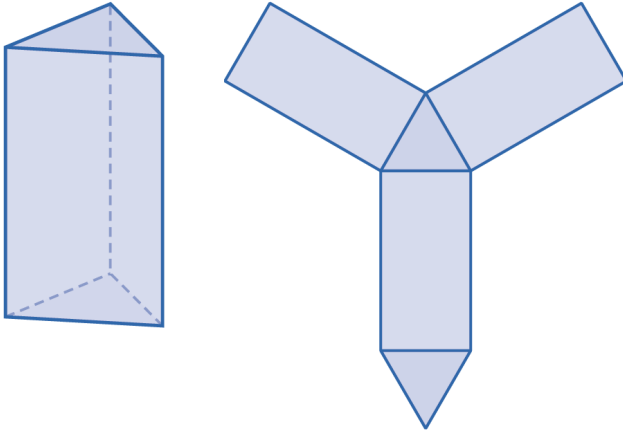
Vastaus

a) 1100 cm³

b) 22 cm³

13.13

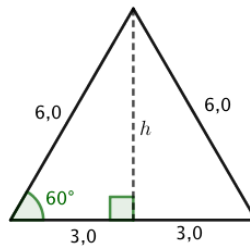
Piirretään 2D-piirtoalueessa särmiön pohjaksi tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on 6,0. Laajennetaan 3D-piirtoalueessa kolmio suoraksi särmiöksi, jonka korkeus on 12,0. Tehdään lopuksi särmiön tasolevitys.



Pohja on tasasivuinen kolmio, joten sen jokaisen kulman suuruus on 60° . Lasketaan pohjakolmion korkeus.

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{6,0} \quad | \cdot 6,0$$

$$h = 6,0 \cdot \sin 60^\circ \\ \approx 5,196$$



Lasketaan särmiön kokonaispinta-ala.

$$A_k = A_{\text{pohjat}} + A_{\text{vaippa}} \\ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5,196 + 3 \cdot 12 \cdot 6 \\ \approx 250$$

Vastaus

pinta-ala 250

13.14

- a) Kasvihuoneen päädyt muodostavat yhden ympyrän,
jonka säde on $\frac{1,7 \text{ m}}{2} = 0,85 \text{ m}$.

Kasvihuoneen katto on suorakulmio,
jonka kanta on puoliympyrän kaaren pituinen ja korkeus $2,3 \text{ m}$.

Lasketaan kasvihuoneeseen tarvittavan muovin pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_k &= A_{\text{päädyt}} + A_{\text{katto}} \\ &= \pi \cdot 0,85^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,85 \cdot 2,3 \\ &\approx 8,4 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Muovia tarvitaan $8,4 \text{ m}^2$.

- b) Kasvihuone on suora lieriö, jonka pohja on puoliympyrä.
Lasketaan kasvihuoneen tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \pi r^2 h \\ &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 0,85^2 \cdot 2,3 \\ &\approx 2,6 \text{ (m}^3\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus

- a) $8,4 \text{ m}^2$
b) $2,6 \text{ m}^3$

13.15

Kuva on samanlainen kuin esimerkissä 3.

Nyt tilavuus $V = 3 \text{ dl}$ ja pohjan säde $r = 3,0 \text{ cm}$.

Muunnetaan tilavuuden yksikkö vastaamaan säteen yksikköä.

$$3,0 \text{ dl} = 0,3 \text{ L} = 0,3 \text{ dm}^3 = 300 \text{ cm}^3$$

Ratkaistaan tölkin korkeus.

$$V = \pi r^2 h$$

$$300 = \pi \cdot 3,0^2 \cdot h \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$h \approx 10,6103 \text{ (cm)}$$

Lasketaan tölkin kokonaispinta-ala.

$$\begin{aligned} A_k &= A_{\text{pohjat}} + A_{\text{vaippa}} \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 3,0^2 + 2 \cdot \pi \cdot 3,0 \cdot 10,6103 \\ &\approx 260 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Pahvia tarvitaan 260 cm^2 .

Vastaus

$$260 \text{ cm}^2$$

13.16

- a) Muunnetaan tilavuuden yksikkö vastaamaan korkeuden yksikköä.

$$1\text{L} = 1\text{ dm}^3 = 1000\text{ cm}^3$$

Ratkaistaan pohjaneliön sivun pituus x .

$$V = x^2 h$$

$$1000 = x^2 \cdot 20,0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x \approx -7,07107 \text{ tai } x \approx 7,07107$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x \approx 7,07107\text{ cm}$.

Lasketaan tölkin kokonaispinta-ala.

$$A_k = A_{\text{pohjat}} + A_{\text{vaippa}}$$

$$= 2x^2 + 4xh$$

$$= 2 \cdot 7,07107^2 + 4 \cdot 7,07107 \cdot 20,0$$

$$\approx 666\text{ (cm}^2\text{)}$$

Pahvia tarvitaan 666 cm^2 .

- b) Ratkaistaan pohjaympyrän säde r .

$$V = \pi r^2 h$$

$$1000 = \pi \cdot r^2 \cdot 20,0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r \approx -3,98942 \text{ tai } r \approx 3,98942$$

Lasketaan tölkin kokonaispinta-ala.

$$A_k = A_{\text{pohjat}} + A_{\text{vaippa}}$$

$$= 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 3,98942^2 + 2 \cdot \pi \cdot 3,98942 \cdot 20,0$$

$$\approx 601\text{ (cm}^2\text{)}$$

Pahvia tarvitaan 601 cm^2 .

Vastaus

a) 666 cm^2

b) 601 cm^2

13.17

Lattialle valuu vettä

1 minuutissa 18 L

1 tunnissa $60 \cdot 18$ L

8 tunnissa $8 \cdot 60 \cdot 18 = 8640$ L $= 8640 \text{ dm}^3 = 8,640 \text{ m}^3$

Vesikerron on suora lieriö, jonka tilavuus on $8,640 \text{ m}^3$ ja pohjan pinta-ala on 85 m^2 . Ratkaistaan lieriön korkeus.

$$V = Ah$$

$$8,640 = 85 \cdot h \quad |:85$$

$$h \approx 0,10 \text{ (m)}$$

Vesikerroksen syvyys on 10 cm.

Vastaus

10 cm

13.18

Säiliön sisämitat ovat:

korkeus $h = 6,2$ m

pohjan säde $r = 3,2$ m.

Säiliön ulkomitat ovat:

korkeus $H = 6,2$ m + $2 \cdot 0,2$ m = $6,6$ m

pohjan säde $R = 3,2$ m + $0,2$ m = $3,4$ m.

Betonin tilavuus on säiliön ulko- ja sisätilavuuksien erotus.

$$\begin{aligned} V_b &= V_u - V_s \\ &= \pi R^2 H - \pi r^2 h \\ &= \pi \cdot 6,6^2 \cdot 3,4 - \pi \cdot 3,2^2 \cdot 6,2 \\ &\approx 40 \text{ (m}^3\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus

40 m^3

13.19

Kuparin tiheys on 8960 kg/m^3 .

Kuparilangan massa on $340 \text{ g} = 0,340 \text{ kg}$.

Ratkaistaan kuparilangan tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{m}{\rho} \\ &= \frac{0,340 \text{ kg}}{8960 \text{ kg/m}^3} \\ &\approx 0,000\,037\,946 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Suoristettu kuparilanka on suora ympyrälieriö, jonka pohjan säde on $0,75 \text{ mm} = 0,000\,75 \text{ m}$. Ratkaistaan kuparilangan pituus.

$$V = \pi r^2 h$$

$$0,000\,037\,946 = \pi \cdot 0,000\,75^2 \cdot h$$

$$h \approx 21 \text{ (m)}$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

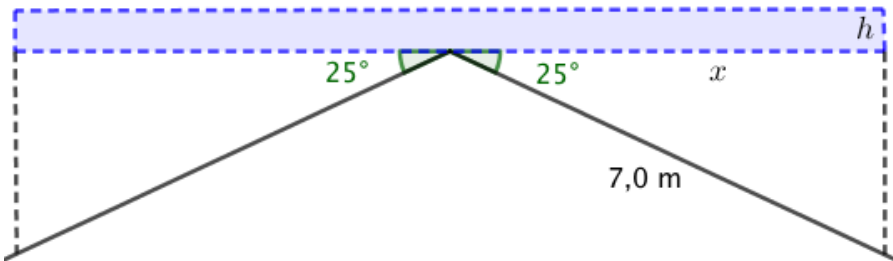
Vastaus

21 m

13.20

Tehtävänä on laskea, kuinka paksun kerroksen vesi muodostaisi, jos se sataisi tasaiselle pinnalle.

Piirretään kuva.



Ratkaistaan katon lappeen sadetta vastaan kohtisuora leveys x .

$$\cos 25^\circ = \frac{x}{7}$$

$$x = 7,0 \cdot \cos 25^\circ$$

Lasketaan vesikerroksen pinta-ala.

$$A_p = 12,0 \cdot 2 \cdot 7,0 \cdot \cos 25^\circ = 152,25... \text{ (m}^2\text{)}$$

Vettä satoi $850 \text{ L} = 0,850 \text{ m}^3$. Ratkaistaan vesikerroksen paksuus.

$$V = A_p h$$

$$0,850 = 152,25... \cdot h$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$h = 0,00558... \text{ (m)}$$

Ilmaistaan sademäärä millimetreinä.

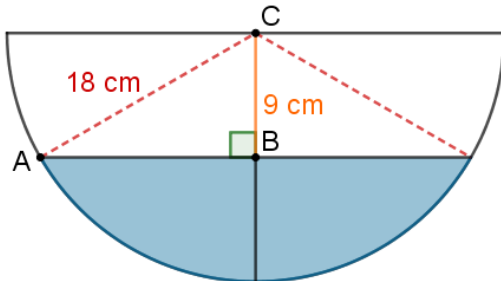
$$0,00558... \text{ m} = 5,58... \text{ mm} \approx 5,6 \text{ mm}$$

Vastaus

5,6 mm

13.21

Piirretään poikkileikkauksesta kuva.



Lasketaan janan AB pituus.

$$AB^2 + 9^2 = 18^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$AB \approx -15,5885 \text{ tai } AB \approx 15,5885$$

Pituus on positiivinen luku, joten $AB \approx 15,5885 \text{ cm}$.

Ratkaistaan kulman ACB suuruus α .

$$\cos \alpha = \frac{9}{18}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{9}{18}\right) = 60^\circ$$

Sinisen segmentin pinta-ala on sektorin ja kolmion pinta-alojen erotus.

$$\begin{aligned} A_{\text{segm}} &= A_{\text{sekt}} - A_{\text{kolmio}} \\ &= \frac{2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 18^2 - \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 15,5885) \cdot 9 \\ &\approx 198,98 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Lasketaan altaassa olevan veden tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= A_{\text{segm}} \cdot h \\ &= 198,98 \cdot 480 \\ &\approx 96000 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Ilmaistaan tilavuus litroina.

$$96000 \text{ cm}^3 = 96 \text{ dm}^3 = 96 \text{ L}$$

Vastaus

96 L